UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI TRENTO
Dipartimento di Matematica
Laboratorio di didattica e comunicazione della matematica

matematita
centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

Matematica trasparente
superfici minime e bolle di sapone

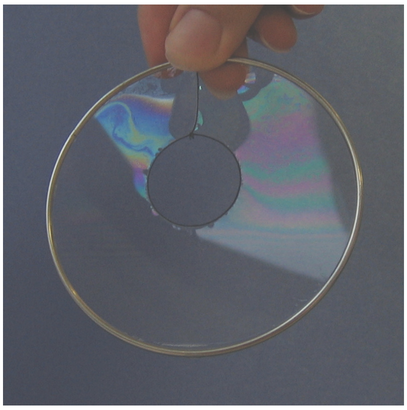
Le lamine di sapone

Se s'immerge in una bacinella contenente acqua e sapone (oppure detersivo concentrato) un telaio di filo metallico, opportunamente piegato e richiuso, e lo si estrae con cautela, si ottiene una pellicola trasparente dalle caratteristiche molto interessanti.

La fisica matematica ci dice che la lamina assume una forma "di minima energia", e che tale energia è proporzionale all'area della sua superficie, almeno in condizioni ideali e trascurando l'azione della gravità.

Ad esempio, usando un anello o un qualsiasi contorno piano, otteniamo una lamina piana, ossia proprio la superficie di area minima per quel particolare contorno.

Se ora leghiamo all'anello metallico un filo di cotone a forma di laccio e lo immergiamo mantenendolo allargato, otteniamo ancora una lamina saponosa piana, dentro la quale il filo di cotone si muove liberamente. Buchiamo la lamina all'interno del laccio. All'improvviso il filo si tende fino a formare una circonferenza:

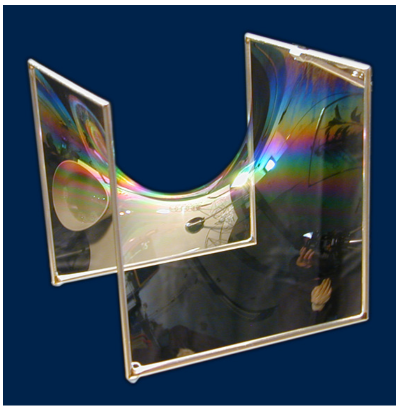


precisamente la forma geometrica che consente, a parità di perimetro, di racchiudere l'area massima (**proprietà isoperimetrica del cerchio**) lasciando così all'esterno, dove è tesa la pellicola di sapone, la minima superficie possibile.

L'osservazione delle pellicole di sapone ci apre così una porta sul mondo delle superfici di area minima. Reciprocamente, lo studio teorico di tali superfici ci consente di spiegare le proprietà geometriche delle lamine saponose.

La matematica afferma ad esempio che le **superfici di area minima**, intese nel senso che la loro estensione è minore di ogni altra superficie con lo stesso contorno, hanno *curvatura media* uguale a zero in ogni punto. Per questo motivo, le lamine che si osservano sono piane (come capita usando un anello di contorno), oppure hanno una tipica forma "a sella", che appare incurvata in un senso lungo una certa direzione e "in senso opposto" nella direzione perpendicolare.

Partendo dalla struttura del cubo ed eliminando due coppie di lati opposti delle basi, otteniamo un telaio che produce una lamina di una forma molto speciale, che ricorda proprio quella di una sella.



Questa lamina rappresenta la configurazione di area minima, delimitata da questo particolare telaio di contorno.

Un esempio famoso di superficie di curvatura media zero è l'*elicoide*, generata dalla rotazione di una semiretta attorno ad un asse perpendicolare, combinata con una traslazione lungo l'asse.

Utilizzando un filo metallico piegato "a cavatappi", si ottiene una lamina di questa forma, simile a una scala a chiocciola.

In altri casi, con il medesimo contorno si possono ottenere lamine fra loro diverse. Diverse non solo per l'aspetto, ma anche per le loro caratteristiche geometriche o topologiche: superfici con o senza "buchi", nastri di Moebius, eccetera. Alcune corrispondono a *minimi assoluti* dell'energia, altre a *minimi relativi*.

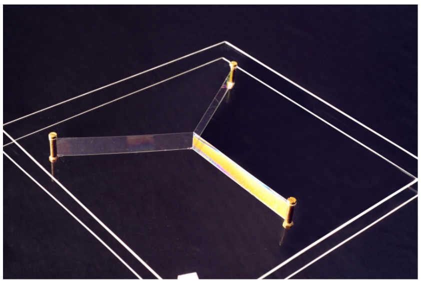
Soffiando contro una pellicola di sapone distesa su un piccolo anello si ottiene facilmente una bolla di forma sferica: di tutte le superfici che delimitano solidi di volume assegnato, la sfera ha infatti l'area minore.

Circonferenza e sfera hanno curvatura (media, nel caso della sfera) costante ma diversa da zero.

Esperimenti con lastre e pioli

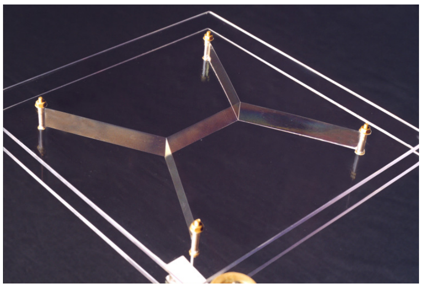
Qual è la rete di lunghezza minima che collega *n* punti nel piano?

Se i punti sono due, è evidente che la soluzione è data dal segmento che li congiunge.
Se sono tre e sono allineati, la soluzione è formata da due segmenti adiacenti, sulla stessa retta.
Ma se invece coincidono con i vertici di un triangolo equilatero, il collegamento migliore si trova congiungendoli con il suo centro!
Ogni altro percorso, che permette di andare da un vertice a un qualsiasi altro, è più lungo di questo.



La rete minima che collega i vertici di un triangolo, ad eccezione di un caso particolare che discuteremo subito, è costituita da tre segmenti che si diramano da uno speciale punto interno, chiamato **punto di Fermat** del triangolo. Gli angoli formati da coppie di tali segmenti sono sempre di 120°.
L'eccezione si ha quando uno degli angoli interni del triangolo in questione misura 120° o più: in tal caso la rete minima è costituita dai due lati più corti, adiacenti all'angolo ottuso.

E se i punti da collegare sono quattro, disposti ad esempio nei vertici di un quadrato? La soluzione non è data dalle diagonali del quadrato, come potrebbe sembrare a prima vista. La forma della rete minima è una sorta di via di mezzo fra una X e una H: ci sono ora due punti di diramazione, da cui si staccano segmenti a 120°.



Le lamine di sapone che si formano fra due lastre trasparenti parallele, tenute a distanza costante da alcuni pioli, sono dei "nastri rettangolari" perpendicolari alle lastre, che collegano i pioli.
Dovendo avere complessivamente la minima area possibile ed essendo rettangoli di altezza costante, avranno di conseguenza la minima lunghezza complessiva: osservati attraverso le lastre trasparenti, questi sistemi laminari fanno intravedere la rete di lunghezza minima che collega le estremità dei pioli!

Sistemi di lamine in reticoli poliedrali

Gran parte degli esperimenti sulle lamine di sapone furono inizialmente compiuti da J. Plateau, un fisico sperimentale belga del Diciannovesimo secolo.

Plateau osservò delle particolari proprietà geometriche nei sistemi laminari, degli *schemi* che si ripetono invariati anche modificando profondamente i contorni che sostengono le lamine. Queste ultime, una volta raggiunta una posizione di equilibrio stabile, si dispongono sempre in configurazioni speciali, realizzando strutture anche molto complesse ma governate da pochi e semplici principi.

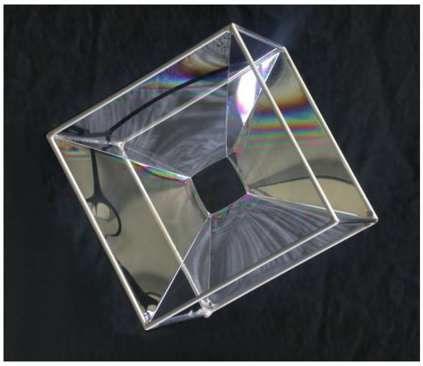
Ad esempio, si osserva che le pellicole di sapone possono incontrarsi solo a gruppi di tre, formando angoli uguali a 120° (**Prima legge di Plateau**).

Come abbiamo visto, le linee di intersezione di tre lamine, talvolta chiamate "spigoli liquidi", si trovano frequentemente negli esperimenti con lastre parallele e corrispondono ai punti di diramazione delle reti minime.

Quando, nei sistemi laminari più complessi, si trovano più spigoli liquidi concorrenti in uno stesso punto, si osserva che sono sempre a gruppi di quattro alla volta e che l'angolo fra due spigoli qualunque è costante e misura approssimativamente 109° (**Seconda legge di Plateau**).

Una configurazione di questo tipo si ottiene ad esempio immergendo in acqua e sapone un telaio a forma di reticolo tetraedrale, che rappresenta gli spigoli di una piramide regolare con facce triangolari equilatere.
Il sistema di lamine che si forma è costituito da sei triangoli, uniti a gruppi di tre lungo quattro spigoli liquidi che collegano i vertici del tetraedro con il suo centro. Gli angoli fra le lamine sono tutti uguali, come pure quelli fra gli spigoli: sono così rispettate le leggi di Plateau.

Con un reticolo cubico si ottiene un sistema laminare più complicato, formato da tredici lamine che si incontrano a gruppi di tre lungo dodici spigoli liquidi.



Questi ultimi si incontrano a gruppi di quattro nei vertici della lamina centrale, di forma quadrangolare.

Laboratorio di didattica e comunicazione della matematica
Dipartimento di Matematica - Università di Trento
via Sommarive 14 (loc. Povo) 38100 Trento
tel. 0461281599 italo.tamanini@unitn.it